

H. SCHLICHTING

# Grenzschicht - Theorie

WISSENSCHAFTLICHE BÜCHEREI

# Grenzschicht-Theorie

von

Dr. Hermann Schlichting

o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig,  
Direktor der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen  
und Leiter des Instituts für Aerodynamik  
der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig

Fünfte erweiterte und neubearbeitete Auflage, mit 386 Bildern und 34 Tabellen



VERLAG G. BRAUN · KARLSRUHE

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
EINLEITUNG . . . . .	1
<b>Teil A: Grundgesetze der Strömung einer zähen Flüssigkeit</b>	
KAPITEL I. Einige Grundzüge der Strömungen mit Reibung. . . . .	5
a. Wirkliche und ideale Flüssigkeiten . . . . .	5
b. Zähigkeit . . . . .	6
c. Kompressibilität. . . . .	8
d. Die HAGEN-POISEUILLESche Rohrströmung . . . . .	10
e. Ähnlichkeitsgesetze; REYNOLDSSche Zahl und MACHSche Zahl . . . . .	12
f. Vergleich der Theorie der idealen Flüssigkeit mit Messungen . . . . .	19
Literatur . . . . .	23
KAPITEL II. Grundzüge der Grenzschicht-Theorie. . . . .	24
a. Der Begriff der Grenzschicht . . . . .	24
b. Ablösung und Wirbelbildung . . . . .	28
c. Turbulente Strömung im Rohr und in der Grenzschicht. . . . .	36
Literatur . . . . .	42
KAPITEL III. Aufstellung der Bewegungsgleichungen einer kompressiblen zähen Flüssigkeit (NAVIER-STOKESSche Gleichungen) . . . . .	43
a. Die Grundgleichungen der Mechanik der Flüssigkeitsbewegung . . . . .	43
b. Der allgemeine Spannungszustand eines deformierbaren Körpers . . . . .	44
c. Der allgemeine Deformationszustand . . . . .	47
d. Zusammenhang zwischen Spannungszustand und Deformationszustand für feste Körper (HOOKESches Elastizitätsgesetz) . . . . .	48
e. Zusammenhang zwischen Spannungszustand und Deformationszustand für Flüssigkeiten und Gase (STOKESSches Reibungsgesetz) . . . . .	51
f. Die NAVIER-STOKESSchen Gleichungen . . . . .	52
Literatur . . . . .	55
KAPITEL IV. Allgemeine Eigenschaften der NAVIER-STOKESSchen Gleichungen . . . . .	56
a. Ableitung des REYNOLDSSchen Ähnlichkeitsgesetzes aus den NAVIER-STOKESSchen Gleichungen . . . . .	56
b. Die reibungslosen Strömungen als „Lösungen“ der NAVIER-STOKESSchen Gleichungen . . . . .	59
c. Die NAVIER-STOKESSchen Gleichungen als Wirbeltransportgleichung . . . . .	59
d. Der Grenzfall sehr großer Zähigkeitskräfte (sehr kleine REYNOLDSSche Zahl) . . . . .	61
e. Der Grenzfall sehr kleiner Zähigkeitskräfte (sehr große REYNOLDSSche Zahl) . . . . .	63
f. Mathematisches Beispiel zum Grenzübergang $Re \rightarrow \infty$ . . . . .	65
Literatur . . . . .	67
KAPITEL V. Exakte Lösungen der NAVIER-STOKESSchen Gleichungen . . . . .	68
a. Schichtenströmungen . . . . .	68
1. Kanalströmung und COUETTE-Strömung . . . . .	69
2. Die HAGEN-POISEUILLESche Rohrströmung . . . . .	70
3. Die Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern . . . . .	72
4. Die plötzlich in Gang gesetzte ebene Wand (Erstes STOKESSches Problem) . . . . .	74
5. Der zeitliche Anlauf bei der COUETTE-Strömung . . . . .	75
6. Rohranlaufströmung . . . . .	76
7. Die Strömung in der Nähe einer oszillierenden ebenen Wand (Zweites STOKESSches Problem) . . . . .	77
8. Eine allgemeine Klasse von instationären Lösungen . . . . .	78

	Seite
b. Andere exakte Lösungen . . . . .	79
9. Die ebene Staupunktströmung . . . . .	79
10. Die räumliche Staupunktströmung . . . . .	83
11. Die Strömung in der Nähe einer rotierenden Scheibe . . . . .	84
12. Strömung in konvergenten und divergenten Kanälen . . . . .	91
Literatur . . . . .	94
KAPITEL VI. Schleichende Bewegungen . . . . .	96
a. Die Differentialgleichungen der schleichenden Bewegung . . . . .	96
b. Strömung um die Kugel . . . . .	97
c. Hydrodynamische Schmiertheorie . . . . .	100
d. Die HELE-SHAW-Strömung . . . . .	104
Literatur . . . . .	106
<b>Teil B: Laminare Grenzschichten</b>	
KAPITEL VII. Die Grenzschichtgleichungen der ebenen Strömung; Plattengrenzschicht . . . . .	108
a. Aufstellung der Grenzschichtgleichungen . . . . .	108
b. Ablösung der Grenzschichten . . . . .	113
c. Eine Bemerkung zur Integration der Grenzschichtgleichungen . . . . .	114
d. Reibungswiderstand . . . . .	115
e. Die Plattengrenzschicht . . . . .	116
Literatur . . . . .	125
KAPITEL VIII. Allgemeine Eigenschaften der Grenzschichtgleichungen . . . . .	126
a. Abhängigkeit des Grenzschichtverlaufs von der REYNOLDSschen Zahl . . . . .	126
b. Die „ähnlichen“ Lösungen der Grenzschichtgleichungen . . . . .	128
c. Die Wandbindungen . . . . .	133
d. Transformation der Grenzschichtgleichungen in die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	134
e. Impuls- und Energiesatz der Grenzschicht . . . . .	135
Literatur . . . . .	139
KAPITEL IX. Exakte Lösungen der stationären Grenzschichtgleichungen für das ebene Problem . . . . .	140
a. Die Keilströmungen . . . . .	141
b. Strömung im konvergenten Kanal . . . . .	143
c. Strömung um einen Zylinder (BLASUSSche Reihe) . . . . .	145
d. Die Grenzschicht zur Potentialströmung $U(x) = U_0 - a x^n$ . . . . .	154
e. Die Reihe von H. GÖRTLER . . . . .	156
f. Nachlauf hinter der längsangeströmten ebenen Platte . . . . .	157
g. Der ebene Strahl . . . . .	162
h. Die laminare Trennungsschicht . . . . .	165
i. Die ebene Kanaleinlaufströmung . . . . .	167
k. Das Fortsetzungsverfahren . . . . .	169
l. Das Differenzenverfahren . . . . .	172
Literatur . . . . .	176
KAPITEL X. Näherungsverfahren zur Lösung der Grenzschichtgleichungen für stationäre ebene Strömungen . . . . .	179
a. Das Impulsverfahren für die längsangeströmte ebene Platte . . . . .	179
b. Das Impulsverfahren für den allgemeinen Fall mit Druckgradient . . . . .	184
c. Vergleich des Näherungsverfahrens mit exakten Lösungen . . . . .	193
1. Die längsangeströmte Platte . . . . .	193
2. Die ebene Staupunktströmung . . . . .	193
3. Die Strömung um einen Kreiszyylinder . . . . .	193
d. Weitere Beispiele . . . . .	195
e. Andere Näherungsverfahren . . . . .	198
f. Laminare Strömung mit Druckanstieg . . . . .	200
Literatur . . . . .	203

	Seite
KAPITEL XI. Rotationssymmetrische und dreidimensionale Grenzschichten . . . . .	205
a. Exakte Lösungen für rotationssymmetrische Grenzschichten . . . . .	205
1. Die Drehströmung über festem Grund . . . . .	205
2. Der runde Strahl . . . . .	210
3. Der runde Nachlauf . . . . .	214
4. Die Grenzschicht an einem Rotationskörper . . . . .	215
b. Näherungslösungen für rotationssymmetrische Grenzschichten; Rohreinlauf . . . . .	221
1. Näherungsverfahren für Grenzschichten an nichtrotierenden Drehkörpern . . . . .	221
2. Grenzschichten an rotierenden Drehkörpern . . . . .	224
c. Zusammenhang zwischen rotationssymmetrischen und ebenen Grenzschichten . . . . .	227
d. Dreidimensionale Grenzschichten . . . . .	229
1. Grenzschichten am schiebenden Zylinder . . . . .	230
2. Grenzschichten an anderen Körpern . . . . .	237
Literatur . . . . .	239
KAPITEL XII. Temperaturgrenzschichten in laminarer Strömung . . . . .	243
a. Aufstellung der Energiegleichung . . . . .	243
b. Temperaturerhöhung durch adiabatische Kompression . . . . .	246
c. Ähnlichkeitstheorie der Wärmeübertragung . . . . .	249
d. Die Grenzschichtvereinfachungen . . . . .	254
e. Allgemeine Eigenschaften der Temperaturgrenzschichten . . . . .	257
1. Erzwungene und natürliche Strömungen . . . . .	257
2. Wärmeundurchlässige Wand . . . . .	257
3. Analogie zwischen Wärmeübergang und Reibungswiderstand . . . . .	258
4. Einfluß der PRANDTL-Zahl . . . . .	260
f. Exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer zähen Strömung . . . . .	263
1. COUETTE-Strömung . . . . .	263
2. Kanalströmung . . . . .	267
g. Temperaturgrenzschichten bei erzwungener Strömung . . . . .	268
1. Die längsangeströmte ebene Platte . . . . .	269
2. Weitere ähnliche Lösungen der Temperaturgrenzschichtgleichungen . . . . .	277
3. Temperaturgrenzschichten an beliebigen Körpern mit konstanter Wandtemperatur . . . . .	279
4. Temperaturgrenzschichten an Körpern mit beliebiger Temperaturverteilung . . . . .	284
5. Temperaturgrenzschichten an Rotationskörpern und rotierenden Körpern . . . . .	286
6. Messungen am Kreiszyylinder und an anderen Körpern . . . . .	287
7. Einfluß der Turbulenz in der Außenströmung . . . . .	289
h. Temperaturgrenzschichten bei natürlicher Strömung . . . . .	290
Literatur . . . . .	295
KAPITEL XIII. Laminare Grenzschichten bei kompressibler Strömung . . . . .	301
a. Physikalische Grundlagen . . . . .	301
b. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung . . . . .	304
c. Die Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte . . . . .	307
d. Die Grenzschicht mit Druckgradient . . . . .	314
1. Exakte Lösungen . . . . .	314
1.1 Die ILLINGWORTH-STEWARTSON-Transformation . . . . .	314
1.2 Die „ähnlichen“ Lösungen . . . . .	318
2. Näherungsverfahren . . . . .	327
e. Zusammenwirken von Grenzschicht und Verdichtungsstoß . . . . .	337
Literatur . . . . .	347
KAPITEL XIV. Grenzschichtbeeinflussung bei laminarer Strömung . . . . .	352
a. Die verschiedenen Arten der Grenzschichtbeeinflussung . . . . .	352
1. Mitbewegen der Wand . . . . .	353
2. Beschleunigung der Grenzschicht (Ausblasen) . . . . .	354
3. Absaugung der Grenzschicht . . . . .	355
4. Einblasen eines anderen Gases . . . . .	356
5. Laminarhaltung durch Formgebung (Laminarprofile) . . . . .	356
6. Kühlung der Wand . . . . .	356

	Seite
b. Grenzschichtabsaugung . . . . .	357
1. Theoretische Ergebnisse . . . . .	357
1.1 Die Grundgleichungen . . . . .	357
1.2 Exakte Lösungen . . . . .	358
1.3 Näherungslösungen . . . . .	366
2. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	368
2.1 Auftriebserhöhung . . . . .	369
2.2 Widerstandsverminderung . . . . .	371
c. Einblasen eines anderen Gases (Zweistoffgrenzschichten) . . . . .	374
1. Theoretische Ergebnisse . . . . .	374
1.1 Die Grundgleichungen . . . . .	374
1.2 Exakte Lösungen . . . . .	375
1.3 Näherungslösungen . . . . .	376
2. Experimentelle Ergebnisse . . . . .	376
Literatur . . . . .	377
<b>KAPITEL XV. Instationäre Grenzschichten . . . . .</b>	<b>381</b>
a. Allgemeines über die Berechnung der instationären Grenzschichten . . . . .	381
1. Grenzschichtgleichungen . . . . .	382
2. Verfahren der sukzessiven Approximation . . . . .	383
3. Verfahren von C. C. LIN für periodische Außenströmungen . . . . .	384
4. Reihenentwicklung bei schwacher Störung einer stationären Strömung . . . . .	386
5. Ähnliche und halbähnliche Lösungen . . . . .	388
6. Näherungsverfahren . . . . .	388
b. Ausbildung der Grenzschicht bei plötzlichem Ingangsetzen der Bewegung . . . . .	388
1. Ebenes Problem . . . . .	389
2. Rotationssymmetrisches Problem . . . . .	393
c. Ausbildung der Grenzschicht bei beschleunigter Bewegung . . . . .	396
d. Experimentelle Untersuchungen über den Anfahrvorgang . . . . .	398
e. Periodische Grenzschichtströmungen . . . . .	401
1. Der oszillierende Zylinder . . . . .	401
2. Periodische Außenströmung (nach C. C. LIN) . . . . .	405
3. Außenströmung mit geringer periodischer Schwankung . . . . .	407
4. Die oszillierende Rohrströmung . . . . .	409
f. Kompressible instationäre Grenzschichten . . . . .	411
1. Grenzschicht hinter einer Stoßwelle . . . . .	412
2. Längsangeströmte ebene Platte bei veränderlicher Außengeschwindigkeit und Wandtemperatur . . . . .	416
Literatur . . . . .	417
<b>Teil C: Der Umschlag laminar-turbulent</b>	
<b>KAPITEL XVI. Entstehung der Turbulenz I. . . . .</b>	<b>421</b>
Einige experimentelle Ergebnisse; Grundlagen der Stabilitätstheorie und deren experimentelle Bestätigung für die Plattengrenzschicht . . . . .	421
a. Einige experimentelle Ergebnisse über den Umschlag laminar-turbulent . . . . .	421
1. Der Umschlag bei der Rohrströmung . . . . .	421
2. Der Umschlag in der Grenzschicht umströmter Körper . . . . .	424
b. Grundlagen der Stabilitätstheorie der Laminarströmung . . . . .	429
1. Vorbemerkung . . . . .	429
2. Grundlagen der Methode der kleinen Schwingungen . . . . .	429
3. Form der Störungsbewegung . . . . .	432
4. Das Eigenwertproblem . . . . .	433
5. Allgemeine Eigenschaften der Störungsdifferentialgleichung . . . . .	435
c. Ergebnisse der Stabilitätstheorie für die Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte . . . . .	438
1. Einige ältere Stabilitätsuntersuchungen . . . . .	438
2. Berechnung der Indifferenzkurve nach W. TOLLMIEH . . . . .	439
3. Ergebnisse für die Plattengrenzschicht . . . . .	443

	Seite
d. Vergleich der Stabilitätstheorie mit Versuchsergebnissen . . . . .	446
1. Ältere Messungen des Umschlages laminar-turbulent . . . . .	446
2. Bestätigung der Stabilitätstheorie durch Versuche . . . . .	448
Literatur . . . . .	455
<b>KAPITEL XVII. Entstehung der Turbulenz II . . . . .</b>	<b>458</b>
Einfluß des Druckgradienten, der Absaugung, der Kompressibilität, des Wärmeüberganges und der Rauigkeit auf den Umschlag laminar-turbulent . . . . .	458
Vorbemerkung . . . . .	458
a. Einfluß des Druckgradienten auf den Umschlag der Grenzschicht . . . . .	458
b. Berechnung der Lage des Indifferenzpunktes für einen vorgegebenen Körper . . . . .	464
c. Einfluß der Absaugung auf den Umschlag der Grenzschicht . . . . .	474
d. Einfluß eingepprägter Kräfte auf den Umschlag . . . . .	480
1. Grenzschichten an konvexen Wänden (Zentrifugalkraft) . . . . .	480
2. Strömungen inhomogener Flüssigkeiten (Dichteschichtung) . . . . .	482
e. Einfluß des Wärmeüberganges und der Kompressibilität auf den Umschlag . . . . .	484
1. Vorbemerkung . . . . .	484
2. Einfluß des Wärmeüberganges . . . . .	484
3. Einfluß der Kompressibilität . . . . .	486
f. Stabilität der Grenzschicht bei dreidimensionalen Störungen . . . . .	491
1. Strömung zwischen konzentrischen rotierenden Zylindern . . . . .	491
2. Grenzschichten an konkaven Wänden . . . . .	496
3. Dreidimensionale Grenzschichten . . . . .	499
g. Einfluß der Wandrauigkeit auf den Umschlag . . . . .	500
1. Vorbemerkung . . . . .	500
2. Zylindrische Einzelrauigkeiten . . . . .	501
3. Flächenhafte Rauigkeiten . . . . .	504
h. Rotationsymmetrische Strömungen . . . . .	506
Literatur . . . . .	507

**Teil D: Turbulente Strömungen**

<b>KAPITEL XVIII. Grundzüge der turbulenten Strömungen . . . . .</b>	<b>514</b>
Vorbemerkung . . . . .	514
a. Mittlere Bewegung und Schwankungsbewegung . . . . .	516
b. Die zusätzlichen „scheinbaren“ turbulenten Spannungen . . . . .	518
c. Herleitung des Spannungstensors der turbulenten Scheinreibung aus den NAVIER-STOKESSchen Bewegungsgleichungen . . . . .	519
d. Einige Messungen von turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten . . . . .	523
e. Energiehaushalt in turbulenten Strömungen . . . . .	529
f. Windkanalturbulenz . . . . .	530
Literatur . . . . .	533
<b>KAPITEL XIX. Theoretische Ansätze für die Berechnung turbulenter Strömungen . . . . .</b>	<b>535</b>
a. Die Grundgleichungen . . . . .	535
b. Der PRANDTLsche Mischungsweg . . . . .	536
c. Zwei weitere Ansätze für die turbulente Schubspannung . . . . .	540
d. Die VON KÁRMÁNsche Ähnlichkeitshypothese . . . . .	542
e. Universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetze . . . . .	544
1. Mittengesetz der Geschwindigkeitsverteilung nach VON KÁRMÁN . . . . .	544
2. Wandgesetz der Geschwindigkeitsverteilung nach PRANDTL . . . . .	546
f. Weiterer Ausbau der theoretischen Ansätze . . . . .	550
Literatur . . . . .	550
<b>KAPITEL XX. Turbulente Rohrströmung . . . . .</b>	<b>552</b>
a. Experimentelle Ergebnisse für das glatte Rohr . . . . .	552
b. Zusammenhang zwischen Widerstandsgesetz und Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	556
c. Universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetze für sehr große REYNOLDSSche Zahlen . . . . .	558

	Seite
d. Das universelle Widerstandsgesetz des glatten Rohres bei sehr großen REYNOLDSSchen Zahlen . . . . .	565
e. Rohre von nichtkreisförmigem Querschnitt . . . . .	568
f. Rauhe Rohre, insbesondere Sandrauhigkeit . . . . .	570
g. Andere Rauigkeiten . . . . .	578
h. Strömung in gekrümmten Rohren und Diffusoren . . . . .	581
i. Instationäre Rohrströmung . . . . .	585
Literatur . . . . .	585
<b>KAPITEL XXI. Turbulente Grenzschichten bei Gleichdruck; Plattengrenzschicht, rotierende Scheiben, Rauigkeit . . . . .</b>	<b>588</b>
a. Die glatte ebene Platte . . . . .	589
1. Widerstandsgesetz nach dem $1/7$ -Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	590
2. Widerstandsgesetz nach dem logarithmischen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	593
3. Weitere Verfeinerungen . . . . .	596
4. Einfluß der endlichen Abmessungen; Grenzschichten in Ecken . . . . .	597
b. Die rotierende Scheibe . . . . .	598
1. Die „freie“ Scheibe . . . . .	598
2. Die Scheibe im Gehäuse . . . . .	600
c. Die rauhe Platte . . . . .	602
1. Das Widerstandsgesetz der gleichmäßig rauhen Platte . . . . .	602
2. Messungen an Einzelrauhigkeiten . . . . .	605
3. Übergang glatt-rauh . . . . .	607
d. Die zulässige Rauigkeit . . . . .	609
Literatur . . . . .	615
<b>KAPITEL XXII. Turbulente Grenzschichten mit Druckgradient bei inkompressibler Strömung . . . . .</b>	<b>618</b>
a. Einige experimentelle Ergebnisse . . . . .	618
b. Berechnungsverfahren für ebene turbulente Grenzschichten . . . . .	620
1. Allgemeines . . . . .	620
2. Die Kenngrößen der Grenzschicht . . . . .	621
3. Berechnung der Impulsverlustdicke . . . . .	623
4. Berechnung des Formparameters . . . . .	629
5. Durchführung der Rechnung und Beispiel . . . . .	632
6. Turbulente Grenzschichten mit Absaugung und Ausblasen . . . . .	636
7. Reibungsschichten an gewölbten Wänden . . . . .	640
c. Dreidimensionale Grenzschichten . . . . .	641
1. Grenzschichten an Rotationskörpern . . . . .	641
2. Grenzschichten an rotierenden Körpern . . . . .	641
3. Konvergente und divergente Grenzschichten . . . . .	643
Literatur . . . . .	645
<b>KAPITEL XXIII. Turbulente Grenzschichten bei kompressibler Strömung . . . . .</b>	<b>648</b>
a. Allgemeines . . . . .	648
1. Der turbulente Wärmetransport . . . . .	648
2. Die Grundgleichungen bei kompressibler Strömung . . . . .	649
3. Das Verhältnis der Austauschgrößen für Impuls und Wärme . . . . .	652
b. Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung . . . . .	653
1. Die Wärmeübertragung an der glatten ebenen Platte . . . . .	653
2. Die Wärmeübertragung an rauhen Oberflächen . . . . .	658
3. Die Temperaturverteilung bei kompressibler Strömung . . . . .	659
c. Einfluß der MACH-Zahl; Widerstandsgesetze . . . . .	661
1. Die längsangeströmte ebene Platte . . . . .	661
2. Die Grenzschicht bei veränderlichem Druckverlauf . . . . .	668
Literatur . . . . .	669



	Seite
KAPITEL XXIV. Freie Turbulenz . . . . .	673
a. Allgemeines . . . . .	673
b. Abschätzung der Breitenzunahme und der Geschwindigkeitsabnahme der Freistrahlen	675
c. Beispiele . . . . .	679
1. Die zeitliche Entwicklung einer Trennungsschicht . . . . .	679
2. Die freie Strahlgrenze . . . . .	681
3. Die ebene Nachlaufströmung hinter einem Einzelkörper . . . . .	682
4. Die Nachlaufströmung hinter einem Stabgitter . . . . .	687
5. Der ebene Freistrahle . . . . .	688
6. Der runde Freistrahle . . . . .	690
d. Impulsübertragungsansatz von H. REICHARDT . . . . .	693
e. Wärmeausbreitung bei freier Turbulenz. . . . .	695
Literatur . . . . .	697
KAPITEL XXV. Ermittlung des Profilwiderstandes. . . . .	699
a. Allgemeines . . . . .	699
b. Das experimentelle Verfahren von BETZ . . . . .	700
c. Das experimentelle Verfahren von JONES . . . . .	702
d. Rechnerische Ermittlung des Profilwiderstandes . . . . .	705
e. Strömungsverluste in Schaufelgittern . . . . .	710
Literatur . . . . .	715
Literatur (Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen) . . . . .	717
Namenverzeichnis . . . . .	722
Sachverzeichnis . . . . .	729
Verzeichnis häufig gebrauchter Abkürzungen . . . . .	733
Zusammenstellung der wichtigsten Formelgrößen . . . . .	734