

Michael Hantel

# Einführung Theoretische Meteorologie



Springer Spektrum

---

Michael Hantel

# Einführung Theoretische Meteorologie

379/4449

**Leibniz Universität Hannover**

Institut für

**Meteorologie und Klimatologie**

Herrenhäuser Str. 2 · 30419 Hannover



**Springer** Spektrum

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Strahlung</b> .....	1
<b>1 Allgemeine Strahlungsgesetze</b> .....	3
1.1 Grundbegriffe .....	3
1.1.1 Strahlungsfluss und Strahldichte .....	3
1.1.2 Das Lambertsche Gesetz .....	5
1.1.3 Vektor der Strahlungsflussdichte .....	8
1.1.4 Energiedichte .....	9
1.1.5 Strahlungsheizung und -kühlung .....	10
1.1.6 Das Spektrum .....	13
1.2 Gesetze der thermischen Strahlung .....	14
1.2.1 Kirchhoffsches Gesetz .....	14
1.2.2 Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz .....	16
1.2.3 Das Plancksche Strahlungsgesetz .....	17
1.2.4 Solare und terrestrische Strahlung .....	18
1.2.5 Treibhauseffekt .....	21
1.3 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie .....	22
1.3.1 Der optische Weg .....	22
1.3.2 Das Beersche Gesetz .....	23
1.3.3 Absorption und Streuung .....	23
1.4 Die Strahlungsübertragungsgleichung (SÜG) .....	24
1.4.1 SÜG im Weltraum .....	24
1.4.2 SÜG im Medium, aber ohne Strahlungsquelle .....	24
1.4.3 SÜG im Medium mit konstanter Strahlungsquelle .....	25
1.4.4 Allgemeine SÜG mit variabler Quelle .....	25
1.4.5 Optisch dichtes Medium .....	26
1.4.6 Die Strahlungsheizung .....	26
<b>2 Terrestrische Strahlung</b> .....	29
2.1 Die planparallele Atmosphäre .....	29
2.2 Berechnung des optischen Weges .....	34
2.3 Berechnung der Strahldichte .....	34
2.4 Berechnung des Flusses .....	35
2.5 Mathematischer Exkurs: Das Exponentialintegral .....	37
2.6 Das Konzept der Transmissionsfunktion .....	38
2.7 Das Konzept der Absorbermasse .....	40
2.8 Die Goodyschen Flussformeln .....	40
<b>3 Solare Strahlung</b> .....	43
3.1 Die SÜG mit Streuung .....	43
3.2 Die Phasenfunktion .....	44
3.3 Rayleigh-Streuung .....	45

3.4	Mikroprozesse .....	46
<b>4</b>	<b>Die Strahlung als Komponente der atmosphärischen Dynamik ..</b>	<b>47</b>
4.1	Fernerkundung.....	47
4.2	Das strahlungskonvektive Gleichgewicht der Atmosphäre .....	47
<b>II</b>	<b>Thermodynamik.....</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Hydrostatik von Geofluiden.....</b>	<b>51</b>
5.1	Zustandsgrößen .....	52
5.1.1	Masse, Menge, Teilchenzahl .....	52
5.1.2	Der Druck .....	53
5.1.3	Die Temperatur .....	55
5.2	Die Zustandsgleichung idealer Gase .....	56
5.2.1	Die universelle Gasgleichung .....	56
5.2.2	Individuelle Gasgleichungen .....	57
5.2.3	Gasgemische .....	57
5.2.4	Die virtuelle Temperatur .....	58
5.3	Zustandsgleichung für Flüssigkeiten und Festkörper .....	59
5.4	Das Geopotenzial .....	59
5.5	Die hydrostatische Gleichung .....	63
5.6	Die barometrische Höhenformel .....	64
5.6.1	Isotherme Atmosphäre .....	65
5.6.2	Polytrope Atmosphäre .....	66
5.7	Zustandsgrößen des Wassers in der Atmosphäre .....	67
<b>6</b>	<b>Elementare Thermodynamik.....</b>	<b>69</b>
6.1	Das Energieprinzip .....	69
6.2	Grundformen der Energie .....	70
6.2.1	Mechanische Energie .....	70
6.2.2	Chemische Energie.....	71
6.2.3	Der Übergang zur Thermodynamik: Wärme.....	73
6.3	Das Prinzip der Energieumwandlungen.....	73
6.3.1	Die Gibbssche Form .....	73
6.3.2	Prozesse und Zustandsänderungen .....	75
6.4	Homogene Systeme .....	76
6.4.1	Spezifische Größen .....	76
6.4.2	Homogenität der Energie .....	78
6.5	Thermodynamische Funktionen .....	79
6.5.1	Die Enthalpie .....	79
6.5.2	Thermodynamische Potentiale .....	80
6.6	Spezifische Wärmekapazitäten von Gasen .....	80
6.6.1	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen .....	81
6.6.2	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck.....	82
6.6.3	Zusammenhang zwischen den Wärmekapazitäten .....	82

6.7	Zustandsänderungen von Gasen .....	83
6.8	Wärme und Entropie .....	86
6.8.1	Die potenzielle Temperatur .....	86
6.8.2	Der Föhnneffekt .....	87
6.8.3	Die Poisson-Gleichung .....	88
6.8.4	Isentroper Temperaturgradient .....	88
6.8.5	Zustandsänderungen idealer Gase .....	89
6.8.6	Entropiezufuhr beim Heizen .....	89
6.8.7	Die Heizung der Atmosphäre .....	90
6.8.8	Isentrop, adiabatisch, reversibel .....	91
6.8.9	Entropiezunahme bei Temperaturlausgleich .....	92
6.9	Chemische Energie .....	94
6.9.1	Das chemische Potenzial .....	95
6.9.2	Phasenübergänge im Gleichgewicht: Die Verdampfungsenthalpie .....	97
6.9.3	Die Clausius-Clapeyronsche Gleichung .....	99
6.10	Latente Wärme .....	101
6.10.1	Enthalpie feuchter Luft .....	101
6.10.2	Die äquivalentpotenzielle Temperatur .....	103
<b>III</b>	<b>Hydrodynamik .....</b>	<b>105</b>
<b>7</b>	<b>Erhaltung des Impulses .....</b>	<b>107</b>
7.1	Die Kraft als Ursache der Bewegung .....	107
7.2	Der Geopotenzialgradient .....	108
7.3	Der Druckgradient .....	109
7.4	Reibungskräfte .....	110
7.4.1	Scherungskräfte .....	110
7.4.2	Normalkräfte .....	114
7.4.3	Gesamte Reibungskraft .....	116
7.5	Gesamte Kraftwirkung: Bewegungsgleichungen .....	117
7.5.1	Die Eulersche Gleichung .....	117
7.5.2	Die Navier-Stokessche Gleichung .....	118
<b>8</b>	<b>Fluidkinematik .....</b>	<b>119</b>
8.1	Trajektorien und Stromlinien .....	119
8.2	Die Bewegungsgleichungen bei starrer Rotation .....	122
8.2.1	Transformation der Zeitableitung bei starrer Rotation .....	123
8.2.2	Die Eulerschen Gleichungen im starr rotierenden System .....	125
8.3	Die hydrostatischen Bewegungsgleichungen .....	127
8.3.1	2D-Bewegungsgleichungen in $z$ -Koordinaten .....	127
8.3.2	Vorgriff: Transformation auf Druckkoordinaten .....	128
8.3.3	2D-Bewegungsgleichungen in $p$ -Koordinaten .....	130
8.3.4	Natürliche Horizontalkoordinaten .....	131
8.3.5	2D-Bewegungsgleichungen in natürlichen Koordinaten .....	132

8.4	Der geostrophische Wind .....	132
8.5	Der Gradientwind .....	134
8.6	Kinematische Größen des Strömungsfelds .....	134
8.6.1	Die Divergenz .....	135
8.6.2	Die Vorticity .....	136
8.6.3	Spezielle Strömungsfelder .....	138
8.7	$f$ -Ebene und $\beta$ -Ebene .....	139
<b>9</b>	<b>Die Kontinuitätsgleichung</b> .....	<b>143</b>
9.1	Die Kontinuitätsgleichung .....	143
9.1.1	Fluidvolumen und Divergenz .....	144
9.1.2	Die Funktionaldeterminante .....	147
9.2	Generalisierte Koordinaten .....	151
9.2.1	Einführung in die generalisierten Koordinaten .....	151
9.2.2	Das Differenzial und die Zeitableitung .....	152
9.2.3	Der Operator der totalen Zeitableitung .....	154
9.2.4	Die advektive Zeitableitung .....	155
9.3	Die fluiddynamische Kontinuitätsgleichung .....	155
9.4	Die Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen .....	157
9.4.1	Kugelkoordinaten .....	157
9.4.2	Rotierende Kugelkoordinaten .....	158
9.4.3	Geofluidkoordinaten .....	159
9.4.4	Hydrostatische Vertikalkoordinaten .....	161
<b>10</b>	<b>Erhaltung der Masse</b> .....	<b>163</b>
10.1	Globale Massenerhaltung .....	163
10.2	Massenerhaltung aus lokaler Sicht .....	164
10.2.1	Die Erhaltung von Autos, Bällen und Kugeln .....	164
10.2.2	Die Massenkontinuitätsgleichung .....	165
10.3	Die Massenflussdichte .....	166
10.4	Die generalisierte Massenkontinuitätsgleichung .....	168
10.5	Die Massenkontinuitätsgleichung für hydrostatische Koordinaten .....	169
<b>11</b>	<b>Erhaltung der Energie</b> .....	<b>171</b>
11.1	Globale Energieerhaltung .....	171
11.2	Ideale Fluide (mit Potenzial) .....	172
11.2.1	Die Gleichung für die mechanische Energie .....	173
11.2.2	Die Gleichung für die innere Energie .....	174
11.2.3	Austausch zwischen mechanischer und innerer Energie .....	175
11.2.4	Der lokale Energiesatz für ideale Fluide .....	175
11.3	Reale Fluide .....	176
11.3.1	Innere Reibung .....	177
11.3.2	Der lokale Energiesatz für reale Fluide .....	177
11.4	Erzeugung von Entropie .....	179
11.4.1	Dissipation .....	179

11.4.2	Wärmeleitung	180
11.5	Haushaltsgleichungen von Energie und Entropie	181
11.6	Energie- und Entropiehaushalt feuchter Luft	183
<b>12</b>	<b>Transformation der Bewegungsgleichungen</b>	<b>185</b>
12.1	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	186
12.2	Kugelkoordinaten $\Lambda^*$ , $\phi^*$ , $R^*$	188
12.3	Rotierende Kugelkoordinaten	189
12.3.1	Zonale Bewegungsgleichung	190
12.3.2	Meridionale Bewegungsgleichung	191
12.3.3	Vertikale Bewegungsgleichung	192
12.3.4	Die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten	192
12.4	Was sind Scheinkräfte?	193
12.5	Flachgeofluide	194
12.6	Hydrostatische Koordinaten	195
12.6.1	Die Metrik in hydrostatischen Koordinaten	197
12.6.2	Spezialfall: Kartesische Koordinaten	197
12.6.3	Spezialfall: Druckkoordinaten	198
12.6.4	Spezialfall: Isentrope Koordinaten	198
12.6.5	Wahl der Gleichungen	199
<b>IV</b>	<b>Barotrope Prozesse</b>	<b>201</b>
<b>13</b>	<b>Elementare Wellentheorie</b>	<b>203</b>
13.1	Schwingungen der ruhenden Atmosphäre	203
13.1.1	Potenzielle Temperatur und potenzielle Dichte	203
13.1.2	Auftriebsschwingungen und statische Stabilität	205
13.2	Darstellung harmonischer Wellen	207
13.2.1	Parameter einer harmonischen Welle	208
13.2.2	Die eindimensionale Wellengleichung	209
13.2.3	Die räumliche Welle	209
13.2.4	Instabilität	210
13.2.5	Dispersion	210
13.3	Oberflächenwellen	211
13.3.1	Gleichungen im Vertikalschnitt	211
13.3.2	Randbedingungen	212
13.3.3	Der horizontale Druckgradient	213
13.3.4	Linearisierung	214
13.3.5	Die Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen	214
13.4	Interne Wellen	215
<b>14</b>	<b>Das Flachwassermodell (FWM)</b>	<b>217</b>
14.1	Barotropie	217
14.1.1	Vertikale Konstanz der horizontalen Druckbeschleunigung	218
14.1.2	Vertikale Konstanz des Horizontalwindes	219

14.1.3	Isotherme und isentrope Atmosphäre .....	220
14.1.4	Barotropie und Zweidimensionalität .....	220
14.2	Das barotrope FWM .....	221
14.2.1	Hydrostasie .....	222
14.2.2	Horizontale Druckbeschleunigung .....	222
14.2.3	Horizontale Bewegungsgleichungen .....	223
14.2.4	Massenerhaltung .....	223
14.2.5	Die Gleichungen für das FWM .....	223
14.3	Die Vorticity-Gleichungen .....	225
14.3.1	Die dynamisch äquivalente Beta-Ebene .....	225
14.3.2	Die Gleichung für die absolute Vorticity .....	225
14.3.3	Die divergenzfreie Vorticity-Gleichung .....	226
14.3.4	Der Beta-Effekt als Voraussetzung von Rossby-Wellen .....	227
14.3.5	Die Gleichung für die potenzielle Vorticity .....	228
14.3.6	Der orographische Beta-Effekt .....	228
<b>15</b>	<b>Lineare Wellen im Flachwassermodell (FWM)</b> .....	<b>231</b>
15.1	Grundzustand .....	232
15.2	Die Störungsgleichungen .....	233
15.3	Der orographische Effekt des Grundstroms .....	236
15.4	Klassifikation der linearisierten Gleichungen .....	236
15.4.1	Freie Wellen (ohne Randbedingungen) .....	237
15.4.2	Wellen mit Randbedingungen in $y$ -Richtung .....	238
15.5	Freie Wellen, divergenzfrei .....	239
15.5.1	Trägheitsschwingungen .....	239
15.5.2	1D-Rossby-Wellen .....	240
15.6	Freie Wellen, divergent .....	242
15.6.1	Schwerewellen (Flachwasserwellen) .....	242
15.6.2	Poincaré-Wellen .....	244
15.7	Das Kanalmodell .....	246
15.7.1	2D-Rossby-Wellen .....	249
15.7.2	Die Kelvin-Welle .....	251
<b>16</b>	<b>Die Skalenanalyse</b> .....	<b>255</b>
16.1	Vorbetrachtung .....	255
16.2	Entdimensionierung .....	256
16.3	Dimensionslose Zahlen .....	257
16.4	Skalenanalyse des Flachwassermodells .....	258
16.5	Reihenentwicklung nach dem Rossbyparameter .....	260
16.5.1	Die nullte Näherung .....	261
16.5.2	Die erste Näherung .....	262
<b>17</b>	<b>Das quasigeostrophische Flachwassermodell (qgFWM)</b> .....	<b>263</b>
17.1	Die Näherungen im qgFWM .....	263
17.2	Die primitiven Gleichungen des qgFWM .....	264

17.3 Die Gleichung der  $qg$  Vorticity ..... 265

17.4 Die Gleichung der  $qg$ -potenziellen Vorticity ..... 267

17.5 Ergänzung: drei Versionen der  $qgpV$  ..... 268

**V Turbulenz und Grenzschicht** ..... 269

**18 Turbulenz** ..... 271

18.1 Der turbulente Impulstransport ..... 271

18.2 Verallgemeinerung: Korrelationsflüsse ..... 273

18.3 Das Schließungsproblem ..... 274

18.4 Die Austauschparametrisierung ..... 275

**19 Die atmosphärische Grenzschicht** ..... 277

19.1 Vertikalaufbau der Grenzschicht ..... 277

19.2 Die Prandtl-Schicht ..... 278

    19.2.1 Die *constant flux layer* ..... 279

    19.2.2 Das Konzept der Mischungslänge ..... 279

    19.2.3 Das logarithmische Windprofil ..... 280

    19.2.4 Verallgemeinerungen ..... 281

19.3 Die Ekman-Schicht ..... 282

    19.3.1 Kräftegleichgewicht in der Ekman-Schicht ..... 282

    19.3.2 Die Ekman-Spirale ..... 283

    19.3.3 Pumpen der Ekman-Schicht ..... 284

**20 Der Energiehaushalt der Grenzschicht** ..... 285

20.1 Energiehaushalt der Ekman-Schicht ..... 285

20.2 Die Gleichung für die kinetische Energie ..... 286

    20.2.1 Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls ..... 287

    20.2.2 Tricks bei der Umformung der Energiegleichung ..... 287

    20.2.3 Die allgemeine Gleichung für die kinetische Energie ..... 287

20.3 Dichtefluktuationen und Boussinesq-Näherung ..... 288

20.4 Die Gleichung für die mittlere kinetische Energie ..... 289

20.5 Die Gleichung für die turbulente kinetische Energie ..... 290

20.6 Energieflussbilanzen ..... 291

**VI Barokline Prozesse** ..... 295

**21 Vorticity und Zirkulation** ..... 297

21.1 Der Baroklinitätsvektor ..... 297

21.2 Die Vorticity-Gleichung ..... 298

    21.2.1 Definitionen der Vorticity ..... 298

    21.2.2 Die dreidimensionale Vorticity-Gleichung ..... 299

21.3 Die Ertelsche potenzielle Vorticity ..... 301

    21.3.1 Ableitung der Ertelschen Vorticity-Gleichung ..... 301

    21.3.2 Die Erhaltungseigenschaft der Ertelschen Vorticity ..... 302

21.4 Der Zirkulationssatz ..... 303

21.4.1	Zusammenhang zwischen Zirkulation und Vorticity .....	305
21.4.2	Anwendung: Das Land-See-Windsystem .....	307
<b>22</b>	<b>Das quasigeostrophische barokline Modell (qgM)</b> .....	<b>311</b>
22.1	Die hydrostatischen primitiven Gleichungen .....	312
22.2	Skalenanalyse der baroklinen primitiven Gleichungen .....	313
22.3	Geostrophischer und ageostrophischer Wind .....	315
22.3.1	Schreibweisen für den geostrophischen Wind .....	316
22.3.2	Kinematische Größen des geostrophischen Windes .....	317
22.3.3	Der ageostrophische Wind .....	319
22.4	Das quasigeostrophische Gleichungssystem.....	320
22.4.1	Die Energiegleichung .....	321
22.4.2	Die Bewegungsgleichungen .....	322
22.4.3	Die quasigeostrophischen Grundgleichungen .....	323
22.4.4	Abgeleitete Gleichungen .....	324
22.5	Die Gleichung der potenziellen Vorticity.....	326
22.6	Die Omega-Gleichung.....	327
22.6.1	Spezielle Vektorformeln.....	328
22.6.2	Der Q-Vektor .....	328
22.6.3	Die Q-Vektor-Gleichung .....	330
<b>23</b>	<b>Das quasigeostrophische Zwei-Schichten-Modell</b> .....	<b>333</b>
23.1	Zusammenfassung der quasigeostrophischen Gleichungen .....	333
23.2	Architektur des Zwei-Schichters .....	335
23.3	Der Grundzustand .....	336
23.4	Die Störungsgleichungen .....	338
23.5	Die Phasengeschwindigkeit barokliner Wellen .....	339
23.6	Baroklin instabile Wellen .....	342
23.7	Liste der Funktionen des Zwei-Schichten-Modells .....	345
23.8	Schlussbemerkungen zum qgM .....	345
<b>VII</b>	<b>Globale Haushalte</b> .....	<b>347</b>
<b>24</b>	<b>Das Haushaltsprinzip</b> .....	<b>349</b>
24.1	Die allgemeine Haushaltsgleichung.....	349
24.1.1	Speicherung.....	350
24.1.2	Ausflüsse .....	350
24.1.3	Quelle.....	351
24.1.4	Das globale Transporttheorem.....	351
24.1.5	Das lokale Transporttheorem .....	352
24.2	Anwendungen des Transporttheorems .....	353
24.3	Advektive Flüsse .....	355
24.3.1	Nichtlinearität der Advektion .....	355
24.3.2	Spezielle Mittelungsoperatoren .....	356
24.3.3	Anisotropie der Flusskomponenten .....	359

24.4	Konduktive Flüsse . . . . .	360
<b>25</b>	<b>Haushalte der globalen Atmosphäre . . . . .</b>	<b>361</b>
25.1	Die Haushaltsgleichung in Druckkoordinaten . . . . .	361
25.1.1	Transformation auf Druckkoordinaten . . . . .	361
25.1.2	Gemittelte Formen der Haushaltsgleichung . . . . .	362
25.1.3	Praktische Umsetzung . . . . .	364
25.2	Der globale Wasserhaushalt . . . . .	365
25.3	Der globale Impulshaushalt . . . . .	369
25.3.1	Die zonale Windkomponente . . . . .	370
25.3.2	Komponenten des Impulshaushalts . . . . .	373
25.4	Der globale Massenhaushalt . . . . .	376
25.4.1	Die Horizontalzirkulation . . . . .	376
25.4.2	Die Meridionalzirkulation . . . . .	377
25.5	Der globale Energiehaushalt . . . . .	380
25.5.1	Energieformen . . . . .	380
25.5.2	Komponenten des globalen Energiehaushalts . . . . .	382
25.5.3	Der Energiehaushalt im zonalen Mittel . . . . .	384
<b>26</b>	<b>Verfügbare potenzielle Energie . . . . .</b>	<b>385</b>
26.1	Die potenzielle Energie eines inkompressiblen Fluids . . . . .	386
26.1.1	Potenzielle Energie in einem barotropen Fluid . . . . .	386
26.1.2	Potenzielle Energie in einem baroklinen Fluid . . . . .	389
26.2	Die Lorenzsche verfügbare potenzielle Energie . . . . .	391
26.2.1	Das Konzept . . . . .	392
26.2.2	Die totale potenzielle Energie . . . . .	393
26.2.3	Verfügbare potenzielle Energie . . . . .	396
26.2.4	Der Haushalt der verfügbaren potenziellen Energie . . . . .	398
26.2.5	Die subskalige Komponente im APE-Zyklus . . . . .	401
<b>VIII</b>	<b>Anhänge . . . . .</b>	<b>403</b>
<b>27</b>	<b>Formeln für Differenziale . . . . .</b>	<b>405</b>
27.1	Das totale Differenzial . . . . .	405
27.2	Wechsel der Funktionsargumente . . . . .	406
27.3	Die relative Ableitung . . . . .	407
<b>28</b>	<b>Werkzeuge der elementaren Vektorrechnung . . . . .</b>	<b>409</b>
28.1	Vektoralgebra . . . . .	410
28.1.1	Basis und Skalarprodukt . . . . .	411
28.1.2	Der Permutationstensor . . . . .	412
28.1.3	Das Vektorprodukt . . . . .	413
28.2	Vektoranalysis . . . . .	413
28.2.1	Gradient eines Skalars . . . . .	414
28.2.2	Anwendung des $\nabla$ -Operators . . . . .	415
28.2.3	Spezielle Vektorformeln . . . . .	417

28.2.4	Die Weber-Transformation .....	418
28.2.5	Die Helmholtzsche Vektorzerlegung .....	418
28.2.6	Komponenten des horizontalen Windes .....	419
<b>29</b>	<b>Weiterführende Literatur</b> .....	<b>421</b>
<b>30</b>	<b>Index</b> .....	<b>425</b>