

H. Schlichting
K. Gersten

Grenzschicht-Theorie

9., völlig
neu
bearbeitete
und erweiterte
Auflage



Springer

Herrmann Schlichting • Klaus Gersten

Grenzschicht-Theorie

Unter Mitarbeit von Egon Krause und Herbert Oertel Jr.

9., völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage
mit 282 Abbildungen und 22 Tabellen

D III 262
330/4037 INSTITUT
FÜR METEOROLOGIE U. KLIMATOLOGIE
UNIVERSITÄT HANNOVER
HERRENHÄUSER STR. 2 - 30419 HANNOVER



Springer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	XVII
-----------------------------	------

Teil A: Grundlagen der Strömungen mit Reibung

1 Einige Grundzüge der Strömungen mit Reibung	1
1.1 Wirkliche und ideale Fluide	1
1.2 Viskosität	2
1.3 Reynolds-Zahl	4
1.4 Laminare und turbulente Strömungen	12
1.5 Asymptotisches Verhalten für große Reynolds-Zahlen	13
1.6 Vergleich von Messungen mit der reibungsfreien Grenzlösung	14
1.7 Zusammenfassung	26
2 Grundzüge der Grenzschicht-Theorie	29
2.1 Grenzschicht-Konzept	29
2.2 Laminare Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte	30
2.3 Turbulente Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte	34
2.4 Ausgebildete turbulente Strömung im Rohr	38
2.5 Grenzschicht am Tragflügelprofil	39
2.6 Ablösung der Grenzschicht	40
2.7 Übersicht zum folgenden Stoff	52
3 Feldgleichungen für die Strömungen Newtonscher Fluide	53
3.1 Beschreibung von Strömungsfeldern	53
3.2 Kontinuitätsgleichung	54
3.3 Impulsgleichung	55
3.4 Allgemeiner Spannungszustand verformbarer Körper	56
3.5 Allgemeiner Verformungszustand strömender Fluide	60
3.6 Beziehung zwischen Spannungen und Verformungsgeschwindigkeiten	66

3.7	Hypothese von Stokes	69
3.8	Volumenviskosität und thermodynamischer Druck	70
3.9	Navier-Stokes-Gleichungen	72
3.10	Energiegleichung	74
3.11	Bewegungsgleichungen für beliebige Koordinatensysteme (Zusammenfassung)	79
3.12	Bewegungsgleichungen für kartesische Koordinaten in Index-Schreibweise	82
3.13	Bewegungsgleichungen in speziellen Koordinatensystemen	85
4	Allgemeine Eigenschaften der Bewegungsgleichungen	89
4.1	Ähnlichkeitsgesetze	89
4.2	Ähnlichkeitsgesetze für Strömungen mit Auftriebskräften (gemischte erzwungene und natürliche Konvektion)	93
4.3	Ähnlichkeitsgesetze für die natürliche Konvektion	97
4.4	Wirbeltransportgleichung	98
4.5	Grenzfall sehr kleiner Reynolds-Zahlen	100
4.6	Grenzfall sehr großer Reynolds-Zahlen	101
4.7	Mathematisches Beispiel zum Grenzübergang $Re \rightarrow \infty$	104
4.8	Mehrdeutigkeit der Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen	107
5	Exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen	109
5.1	Stationäre ebene Strömungen	110
5.1.1	Couette-Poiseuille-Strömungen	110
5.1.2	Jeffery-Hamel-Strömungen (ausgebildete Düsen- und Diffusor-Strömungen)	112
5.1.3	Ebene Staupunktströmung	119
5.1.4	Parabel-Umströmung	125
5.1.5	Kreiszyylinder-Umströmung	126
5.2	Stationäre axialsymmetrische Strömungen	126
5.2.1	Kreisrohr-Strömung (Hagen-Poiseuille-Strömung)	126
5.2.2	Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern	127
5.2.3	Axialsymmetrische Staupunktströmung	128
5.2.4	Strömung an einer rotierenden Scheibe	130
5.2.5	Axialsymmetrischer Freistrahle	135
5.3	Instationäre ebene Strömungen	136
5.3.1	Strömung an einer plötzlich in Gang gesetzten ebe- nen Wand (Erstes Stokessches Problem)	137
5.3.2	Strömung an einer oszillierenden Wand (Zweites Stokessches Problem)	140
5.3.3	Zeitlicher Anlauf der Couette-Strömung	141

5.3.4	Instationäre asymptotische Absaugung	142
5.3.5	Instationäre ebene Staupunktströmung	143
5.3.6	Oszillierende Kanalströmung	149
5.4	Instationäre axialsymmetrische Strömungen	151
5.4.1	Zeitlicher Wirbelzerfall	151
5.4.2	Instationäre Rohrströmung	152
5.5	Zusammenfassung	153

Teil B: Laminare Grenzschichten

6 Grenzschichtgleichungen der ebenen Strömung;

	Plattengrenzschicht	155
6.1	Aufstellung der Grenzschichtgleichungen	155
6.2	Wandreibung, Ablösung und Verdrängung	160
6.3	Dimensionsbehaftete Darstellung der Grenzschichtgleichungen	164
6.4	Reibungswiderstand	166
6.5	Plattengrenzschicht	167

7 Allgemeine Eigenschaften und exakte Lösungen der

	Grenzschichtgleichungen für ebene Strömungen	179
7.1	Wandbindung	180
7.2	Ähnliche Lösungen der Grenzschichtgleichungen	181
7.2.1	Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichung	181
	A. Grenzschichten mit Außenströmungen	184
	B. Grenzschichten ohne Außenströmung	187
7.2.2	Keilströmungen	187
7.2.3	Strömung im konvergenten Kanal	189
7.2.4	Trennungsschicht	190
7.2.5	Gezogene Platte	192
7.2.6	Freistrahle	193
7.2.7	Wandstrahl	195
7.3	Transformation der Koordinaten	197
7.3.1	Görtler-Transformation	197
7.3.2	v. Mises-Transformation	198
7.3.3	Crocco-Transformation	200
7.4	Reihenentwicklungen der Lösungen	200
7.4.1	Blasius-Reihe	200
7.4.2	Görtler-Reihe	202
7.5	Asymptotisches Verhalten der Lösungen stromabwärts	202
7.5.1	Nachlauf hinter ebenen Körpern	203

7.5.2	Grenzschicht an einer bewegten Wand	206
7.6	Integralsätze der Grenzschicht	207
7.6.1	Impulssatz der Grenzschicht	207
7.6.2	Energiesatz	209
7.6.3	Impulsmomentensätze	210
8	Näherungsverfahren zur Lösung der Grenzschichtgleichungen für stationäre ebene Strömungen	213
8.1	Integralverfahren	214
8.2	Ablösungskriterium nach Stratford	220
8.3	Vergleich der Lösungen des Näherungsverfahrens mit exakten Lösungen	221
8.3.1	Verzögerte Staupunktströmung	221
8.3.2	Divergenter Kanal (Diffusor)	223
8.3.3	Kreiszyylinder-Strömung	224
8.3.4	Symmetrische Strömung um ein Joukowsky-Profil	227
9	Temperaturgrenzschichten ohne Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes an das Temperaturfeld	229
9.1	Grenzschichtgleichungen für das Temperaturfeld	229
9.2	Erzwungene Konvektion bei konstanten Stoffwerten	232
9.3	Einfluß der Prandtl-Zahl	235
9.4	Ähnliche Lösungen der Temperaturgrenzschicht-Gleichungen	239
9.5	Integralverfahren zur Berechnung des Wärmeüberganges	244
9.6	Einfluß der Dissipation; Verteilung der adiabaten Wandtemperatur	247
10	Grenzschichten mit Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes an das Temperaturfeld	253
10.1	Vorbemerkung	253
10.2	Grenzschichtgleichungen	254
10.3	Grenzschichten mit mäßigem Wärmeübergang (ohne Schwerkrafteinfluß)	256
10.3.1	Störungsrechnung	256
10.3.2	Methode der Stoffwertverhältnisse (Temperaturverhältnisse)	259
10.3.3	Methode der Referenztemperatur	263
10.4	Kompressible Grenzschichten (ohne Schwerkrafteinfluß)	264
10.4.1	Aufgabenstellung und Stoffgesetze	264
10.4.2	Einfache Lösungen der Energiegleichung	267
10.4.3	Transformation der Grenzschichtgleichungen	269
10.4.4	Ähnliche Lösungen	272

10.4.5	Integralverfahren	281
10.4.6	Grenzschichten bei Hyperschallströmungen	286
10.5	Natürliche Konvektion	288
10.5.1	Grenzschichtgleichungen	288
10.5.2	Transformation der Grenzschicht-Gleichungen	294
10.5.3	Grenzfall großer Prandtl-Zahlen ($T_w = \text{const}$)	295
10.5.4	Ähnliche Lösungen	297
10.5.5	Allgemeine Lösungen	301
10.5.6	Variable Stoffwerte	303
10.5.7	Einfluß der Dissipation	305
10.6	Indirekte natürliche Konvektion	306
10.7	Gemischte Konvektion	309
11	Grenzschichtbeeinflussung (Absaugen/Ausblasen)	315
11.1	Die verschiedenen Arten der Grenzschichtbeeinflussung	315
11.2	Kontinuierliches Absaugen bzw. Ausblasen	320
11.2.1	Grundlagen	320
11.2.2	Massives Absaugen	322
11.2.3	Massives Ausblasen	324
11.2.4	Ähnliche Lösungen	327
11.2.5	Allgemeine Lösungen	332
	1. Plattenströmung mit homogenem Absaugen bzw. Ausblasen	333
	2. Tragflügelprofil	335
11.2.6	Ausblasen und Absaugen bei natürlicher Konvektion	336
11.3	Zweistoffgrenzschichten	337
11.3.1	Überblick	337
11.3.2	Grundgleichungen	338
11.3.3	Analogie zwischen Wärme- und Stoffübertragung	343
11.3.4	Ähnliche Lösungen	344
12	Axialsymmetrische und dreidimensionale Grenzschichten	347
12.1	Axialsymmetrische Grenzschichten	347
12.1.1	Grenzschichtgleichungen	347
12.1.2	Mangler-Transformation	349
12.1.3	Grenzschichten an Rotationskörpern ohne Rotation	351
12.1.4	Grenzschichten an Rotationskörpern mit Rotation	354
12.1.5	Freistrahlen und Nachlauf	358
12.2	Dreidimensionale Grenzschichten	362
12.2.1	Grenzschichtgleichungen	362

12.2.2	Grenzschichten am Zylinder	368
12.2.3	Grenzschichten am schiebenden Zylinder	369
12.2.4	Dreidimensionaler Staupunkt	371
12.2.5	Grenzschichten in Symmetrie-Ebenen	372
12.2.6	Allgemeine Konfigurationen	373
13	Instationäre Grenzschichten	377
13.1	Grundlagen	377
13.1.1	Vorbemerkung	377
13.1.2	Grenzschichtgleichungen	379
13.1.3	Ähnliche und halbähnliche Lösungen	380
13.1.4	Lösungen für kleine Zeiten bzw. große Frequenzen	380
13.1.5	Ablösung instationärer Grenzschichten	382
13.1.6	Integralsätze und Integralverfahren	383
13.2	Instationäre Bewegung von Körpern in ruhender Umgebung	383
13.2.1	Anfahrvorgänge	383
13.2.2	Oszillation von Körpern in ruhender Umgebung	391
13.3	Instationäre Grenzschichten bei einer stationären Grundströmung	395
13.3.1	Periodische Außenströmung	395
13.3.2	Stationäre Strömung mit schwacher periodischer Störung	397
13.3.3	Zeitlicher Übergang zwischen zwei nur wenig verschiedenen stationären Grenzschichten	399
13.4	Kompressible instationäre Grenzschichten	400
13.4.1	Vorbemerkung	400
13.4.2	Grenzschicht hinter einer Stoßwelle	401
13.4.3	Längstangeströmte ebene Platte bei zeitlich veränderlicher Außengeschwindigkeit und Wandtemperatur	404
14	Erweiterungen der Prandtl'schen Grenzschichttheorie	407
14.1	Vorbemerkung	407
14.2	Grenzschichttheorie höherer Ordnung	409
14.3	Hyperschall-Wechselwirkung	419
14.4	Dreierdeck-Theorie	423
14.5	Marginale Ablösung	435
14.6	Massive Ablösung	441

Teil C: Übergang laminar-turbulent

15 Einsetzen der Turbulenz (Stabilitätstheorie)	445
15.1 Einige experimentelle Ergebnisse über den laminar-turbulenten Übergang	445
15.1.1 Übergang bei der Rohrströmung	445
15.1.2 Übergang in der Grenzschicht	450
15.2 Grundlagen der Stabilitätstheorie	455
15.2.1 Vorbemerkung	455
15.2.2 Grundlagen der primären Stabilitätstheorie	457
15.2.3 Orr-Sommerfeld-Gleichung	460
15.2.4 Berechnung der Indifferenzkurve und der Indifferenz-Reynolds-Zahl	467
a Plattengrenzschicht	469
b Einfluß des Druckgradienten	479
c Einfluß der Absaugung	493
d Einfluß des Wärmeüberganges	496
e Einfluß der Kompressibilität	499
f Einfluß der Wandrauheit	505
g Weitere Einflüsse	509
15.3 Instabilität der Grenzschicht bei dreidimensionalen Störungen	510
15.3.1 Vorbemerkung	510
15.3.2 Grundlagen der sekundären Stabilitätstheorie	513
15.3.3 Grenzschichten an gekrümmten Wänden	516
15.3.4 Grenzschicht an der rotierenden Scheibe	522
15.3.5 Dreidimensionale Grenzschichten	524
15.4 Lokale Störungen	529

Teil D: Turbulente Grenzschichten

16 Grundzüge der turbulenten Strömungen	533
16.1 Vorbemerkung	533
16.2 Mittlere Bewegung und Schwankungsbewegung	535
16.3 Grundgleichungen für die mittlere Bewegung turbulenter Strömungen	539
16.3.1 Kontinuitätsgleichung	539
16.3.2 Impulsgleichungen (Reynolds-Gleichungen)	539
16.3.3 Gleichung für die kinetische Energie der turbulenten Schwankungsbewegung (k -Gleichung)	542
16.3.4 Thermische Energiegleichung	544

16.4	Schließungsproblem	546
16.5	Beschreibung der turbulenten Schwankungsbewegung . .	547
16.5.1	Korrelationen	547
16.5.2	Spektren und Turbulenzballen	548
16.5.3	Turbulenz der Außenströmung	550
16.5.4	Berandung turbulenter Gebiete und Intermittenz .	551
16.6	Grenzschichtgleichungen für ebene Strömungen	553
17	Durchströmungen	557
17.1	Couette-Strömung	557
17.1.1	Zweischichten-Struktur des Geschwindigkeitsfeldes und logarithmisches Überlappungsgesetz	557
17.1.2	Universelle Wandgesetze	563
17.1.3	Widerstandsgesetz	575
17.1.4	Turbulenz-Modelle	577
17.1.5	Wärmeübertragung	581
17.2	Ausgebildete Durchströmungen ($A = \text{const}$)	583
17.2.1	Kanalströmung	583
17.2.2	Couette-Poiseuille-Strömungen	584
17.2.3	Rohrströmung	590
17.3	Schlankkanal-Theorie	595
18	Turbulente Grenzschichten ohne Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes an das Temperaturfeld	599
18.1	Turbulenz-Modelle	599
18.1.1	Vorbemerkung	599
18.1.2	Algebraische Turbulenzmodelle	601
18.1.3	Turbulente Energiegleichung	603
18.1.4	Zweigliedungs-Modelle	605
18.1.5	Reynolds-Spannungs-Modelle	607
18.1.6	Modelle für die Wärmeübertragung	611
18.1.7	Niedrig-Reynolds-Zahl-Modelle	613
18.1.8	Grobstruktur-Simulation und direkte Simulation .	614
18.2	Anliegende Grenzschichten	616
18.2.1	Schichtenstruktur	616
18.2.2	Grenzschichtgleichungen in Defekt-Formulierung .	617
18.2.3	Widerstandsgesetz und Kenngrößen der Grenzschicht	621
18.2.4	Gleichgewichtsgrenzschichten	624
18.2.5	Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte	627
18.3	Grenzschichten mit Ablösung	633
18.3.1	Stratford-Strömung	633

18.3.2	Quasi-Gleichgewichtsgrenzschichten	635
18.4	Berechnung ebener Grenzschichten mit Integralverfahren .	639
18.4.1	Direktes Verfahren	639
18.4.2	Inverses Verfahren	642
18.5	Berechnung ebener Grenzschichten mit Feldverfahren . .	644
18.5.1	Anliegende Grenzschichten	644
18.5.2	Grenzschichten mit Ablösung	647
18.5.3	Niedrig-Reynoldszahl-Turbulenzmodelle	648
18.5.4	Zusätzliche Einflüsse	649
18.6	Berechnung thermischer Grenzschichten	652
18.6.1	Grundlagen	652
18.6.2	Berechnung thermischer Grenzschichten mit Feldverfahren	655
19	Turbulente Grenzschichten mit Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes an das Temperaturfeld	657
19.1	Grundgleichungen	657
19.1.1	Zeitliche Mittelung bei variabler Dichte	657
19.1.2	Grenzschichtgleichungen	659
19.2	Kompressible turbulente Grenzschichten	663
19.2.1	Temperaturfeld	663
19.2.2	Überlappungsgesetz	665
19.2.3	Reibungsbeiwert und Nußelt-Zahl	668
19.2.4	Integralverfahren für adiabate Wände	670
19.2.5	Feldverfahren	672
19.2.6	Stoß-Grenzschicht-Interferenz	672
19.3	Natürliche Konvektion	674
20	Axialsymmetrische und dreidimensionale turbulente Grenzschichten	679
20.1	Axialsymmetrische Grenzschichten	679
20.1.1	Grenzschichtgleichungen	679
20.1.2	Grenzschichten ohne Körperrotation	680
20.1.3	Grenzschichten mit Körperrotation	682
20.2	Dreidimensionale Grenzschichten	685
20.2.1	Grenzschichtgleichungen	685
20.2.2	Berechnungsverfahren	690
20.2.3	Beispiele	691
21	Instationäre turbulente Grenzschichten	693
21.1	Mittelung und Grenzschichtgleichungen	693
21.2	Berechnungsverfahren	697
21.3	Beispiele	698

22	Turbulente freie Scherströmungen	701
22.1	Vorbemerkung	701
22.2	Gleichungen für ebene freie Scherschichten	703
22.3	Ebener Freistrah	708
22.3.1	Globale Bilanzen	708
22.3.2	Fernfeld	709
22.3.3	Nahfeld	714
22.3.4	Effekte höherer Ordnung	715
22.4	Trennungsschicht	716
22.5	Ebener Nachlauf	718
22.6	Axialsymmetrische freie Scherströmungen	721
22.6.1	Grundgleichungen	721
22.6.2	Freistrah	722
22.6.3	Nachlauf	724
22.7	Auftriebsstrahlen	725
22.7.1	Ebener Auftriebsstrahl	725
22.7.2	Axialsymmetrischer Auftriebsstrahl	727
22.8	Ebener Wandstrahl	727

Teil E: Numerische Verfahren der Grenzschicht-Theorie

23	Numerische Integration der Grenzschichtgleichungen	731
23.1	Laminare Grenzschichten	731
23.1.1	Vorbemerkung	731
23.1.2	Bemerkungen zu den Grenzschicht- transformationen	733
23.1.3	Explizite und implizite Diskretisierung	734
23.1.4	Lösung der impliziten Differenzgleichungen	738
23.1.5	Integration der Kontinuitätsgleichung	740
23.1.6	Ermittlung des Grenzschichtendes und der Wandschubspannung	740
23.1.7	Integration der transformierten Grenzschicht- gleichung mit dem Box-Schema	741
23.2	Turbulente Grenzschichten	745
23.2.1	Methode der Wandfunktionen	745
23.2.2	Niedrig-Reynoldszahl-Turbulenzmodelle	750
23.3	Instationäre Grenzschichten	751
23.4	Stationäre dreidimensionale Grenzschichten	753
	Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen	759
	Literatur- und Namensverzeichnis	767
	Sachverzeichnis	845